Logique du premier ordre.

Calcul des prédicats du premier ordre, ou
Calcul des relations,

1. Définition :

La logique du premier ordre est l'introduction :

- d'un ensemble V de symboles désignant des *variables*, toujours infini
- un ensemble C de constantes (vide)
- d'un ensemble F de symboles désignant des *fonctions*, éventuellement vide.
- d'un ensemble P de symboles désignant des *prédicats*,
- ainsi que des connecteurs logiques et deux symboles ∀et ∃ appelés quantificateurs.

Cela permet ainsi de formuler des énoncés tels que, « Tout x est P » en symboles, $\forall x\ P(x)$

Les constantes sont des fonctions d'arité 0

Les prédicats représentent :

- ✓ des propriétés, s'ils sont à une place (unaires), ou
- ✓ des relations *n*-aires, entre *n* individus de cet ensemble.

Exemple :
« est mortel » prédicat unaire P(homme)
« est positif » P(x) est le prédicat x positif
P(x,y) est le prédicat x < y (ou x = y)

1.1. Termes

Ce sont des formules composées de manière récurrente comme suit :

- toute variable x, élément de V , est un terme,
- toute constante x, élément de C , est un terme,
- si t1,t2,…,tn sont des termes de T et f est un symbole de fonction *n*-aire et, alors f(t1,t2,…,tn) est un terme.

Un terme est clos s'il ne contient pas de nom de variable.

Exemple :F ={f,g} d'arité 1,2 et V={x,y} C ={a}
T = {a, x,y,…….f(a),f(x),f(y),…….g(a,a), g(a,x),g(a,y),….g(a,f(a)), g(a,f(x))……..}
Les termes ont pour but de représenter les objets sur lesquels vont s'appliquer des prédicats.
Appelons **T** l'ensemble des termes

1.2. Formules atomiques (1er ordre)

Soient t1,t2,…,tn des termes de T et p un prédicat de P , d'arité n alors p(t1,t2,…,tn) est une formule atomique ou atome.

1.3. Formules du premier ordre

La Syntaxe de construction des formules est donnée de manière récurrente :

a. chaque variable est une formule ;

b. si A est une formule alors ¬A l'est aussi ;

c. si A et B sont des formules alors A k B l'est aussi k ∈ {¬ ∨ ∧ → ↔,….}

Les parenthèses assurent l'unicité de la lecture (sens , sémantique) des propositions sans ambiguïté……………………………………………)

Exemple : A v B , A → B,

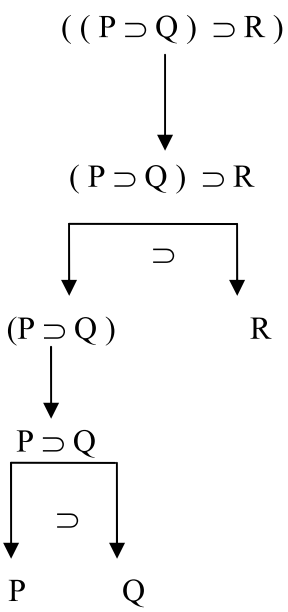
1.3.1. Pour évaluer une formule ou comment une formule a été composée ?

Grâce aux règles d'analyse suivantes, des formules en sous-formules (immédiates) jusqu'à arriver aux propositions atomiques à savoir les variables propositionnelles.

a. les variables propositionnelles n'ont pas de sous-formules ;
b. de ¬A on passe à A comme sous-formule ;
c. A∧B A∨B A→B A↔B ont A et B comme sous-formules ;
d. Des parenthèses les plus externes aux plus internes on passe aux sous-formules.

- Pour déterminer si les chaînes données sont des propositions, il suffit de déterminer leur arbre de décomposition selon les règles d'analyse données.

- Avant toute tentative de décomposition de la proposition, il est judicieux de vérifier la règle des parenthèses ; à savoir les parenthèses ouvrantes **(** doivent égaler les parenthèses fermantes **).**



On arrive finalement à décomposer la proposition en éléments atomiques P Q R qui appartiennent à l'ensemble des propositions et en utilisant les règles d'analyses données

1.3.2. Forme normale conjonctive : *conjonction de disjonctions*
La FNC de $A \vee (B \wedge C)$ *est* $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1.3.3. Forme normale disjonctive : *disjonction de conjonctions*

Toute formule admet une seule FNC et plusieurs FND.

1.4. Modèle d'un langage du premier ordre

L'interprétation est un domaine dans lequel on donne un sens aux symboles du langage.(ex le sens du symbole $\neg$ est non)
Et qui associe à tout symbole de prédicats, une fonction booléenne {0,1}
Une interprétation I est un modèle d'une formule close A, si A est vraie dans I, on note

$$I \models A$$

2. Les clauses.

2.1. Définition d'une Clause :

Une clause est une proposition de la forme l1 v l2 v ….ln où li est soit une proposition atomique (littéral positif) soit la négation d'une proposition atomique (littéral négatif)

2.2. Clauses de Horn : ce sont des clauses avec au plus un littéral positif (proposition atomique).

3. Le calcul des propositions

Le calcul des propositions définit les règles de déductions qui **<u>relient les propositions</u>** entre elles, sans étudier le contenu : c'est une construction syntaxique où on parle vérité, 1ère étape de logique et de raisonnement.
Sachant qu'un théorème est par définition formé des axiomes et de théorèmes dérivés eux-mêmes des théorèmes déjà conçus par les règles de déduction.

3.1. Un axiome est une formule qui par définition est un théorème et une règle de déduction.
Ex : x vx = x x => x v y
Une formule A est un théorème par l'écriture |- A

3.2. Les règles de déduction :

Pour affirmer que les mots sont des théorèmes, il faut pouvoir les déduire de dérivations à partir de l'axiome S et de la règle R.

3.3. La règle de substitution

A un théorème où figure la variable x, alors pour toute formule B, la substitution de B à x, en chacune des occurrences de x , engendre un théorème
Notation : |- A alors |- (B/x)A

Exemple : soit les axiomes et règles de production d'un langage L
S : a□a x□x et de la règle R : x □ y → bx □ by
Nous pouvons dériver les théorèmes suivants :
S : a□a → ba□ba → bba□bba → bbba□bbba →….ou bien
S : x□x→ bx□bx → bbx□bbx → bbba□bbba →… par substitution de b à x

4. Le calcul des prédicats.

Le calcul des propositions présenté en §3 est une version réduite du calcul des prédicats, (arité 0) sans les quantificateurs $\forall$et $\exists$. Il permet de bâtir des démonstrations de formules logiques.
Le calcul des prédicats s'intéresse au contenu des propositions et permet de définir quels sont les énoncés qui sont valides et quels sont ceux qui ne le sont pas. Exemple :
Si on se donne pour C constantes les deux symboles 0 et 1,
Pour F symboles de fonctions binaires + et .,
Et pour P symboles de prédicats binaires les symboles = et <,
Alors le langage utilisé peut être interprété comme étant celui de l'arithmétique. x et y désignant des variables, $x+1$ est un terme,
Question ?
Quels axiomes et règles ? Pouvez vous donner pour ce langage
$\forall x\ (x = x)\ P(x,y) \equiv x=y$.

Klouche-
Djedid Afaf

Signature numérique de Klouche-Djedid Afaf
ID : CN = Klouche-Djedid Afaf, C = <a
Motif : Je suis l'auteure de ce document
Lieu : Oran
Date : 2009.03.27 18:08:43 +01'00'